Ejemplo de estimación del dominio de una inversa local

Consideramos el abierto $U_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función $f : U_0 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} e^y + xy^2 \\ x^3 - x \log y \end{bmatrix} .$$

Dado el punto $a = (2,1)$ y su imagen $b = f(a) = \begin{bmatrix} e+2 \\ 8 \end{bmatrix}$, buscamos bolas $B(a, r_1) \subset U_0$ y $B(b, r_2)$ tales que f sea *regular e inyectiva* en $B(a,r_1)$ y la imagen $f\big(B(a,r_1)\big)$ contenga a $B(b,r_2)$, con lo cual tendremos una inversa local

$$f^{-1} : B(b, r_2) \longrightarrow B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^2 ,$$

de clase $\mathcal{C}^\infty$. El propósito es hallar valores explícitos para r_1 y r_2. Calculamos:

$$Df \;=\; \begin{bmatrix} y^2 & e^y + 2xy \\ & \\ 3x^2 - \log y & -x/y \end{bmatrix} .$$

Buscamos una matriz $P \in \mathrm{O}(2)$ y números $r, \lambda > 0$ tales que:

$$\text{para todo } (x,y) \in B(a,r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^2 \quad \text{es} \quad v^t \left(Df_{(x,y)}\, P \right) v \;\geq\; \lambda \, \|v\|_2^2 \, . \tag{1}$$

Conseguido eso, tendremos que f es regular e inyectiva en $B(a,r)$ y que $f\big(B(a,r)\big) \supseteq B(b, \lambda r)$. En vista de que $Df_a = \begin{bmatrix} 1 & e+2 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$ tiene bastante más grandes (y positivas) las entradas fuera de la diagonal, elegimos $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, con lo cual $(Df)\,P = \begin{bmatrix} e^y + 2xy & y^2 \\ -x/y & 3x^2 - \log y \end{bmatrix}$, y calculamos:

$$\begin{aligned} v^t\,(Df)\,P\,v \;&=\; (e^y + 2xy)\,v_1^2 + (3x^2 - \log y)\,v_2^2 + \left(y^2 - \frac{x}{y} \right) v_1 v_2 \;\geq \\ &\geq\; (e^y + 2xy)\,v_1^2 + (3x^2 - \log y)\,v_2^2 - \left| \left(y^2 - \frac{x}{y} \right) v_1 v_2 \right| \;\geq \\ &\geq\; \left(e^y + 2xy - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_1^2 + \left(3x^2 - \log y - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_2^2 \, . \end{aligned}$$

Probemos a ver si para $r = 1/2$ existe un $\lambda > 0$ cumpliendo (1). Si $(x,y) \in B(a, 1/2)$, entonces:

$$\frac{3}{2} \;<\; x \;<\; \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \;<\; y \;<\; \frac{3}{2} \, .$$

Haciendo uso de $e^t \geq t+1$ y $\log t \leq t-1$, deducimos que si $(x,y) \in B(a,1/2)$ entonces:

$$\begin{aligned} e^y + 2xy \;&>\; e^{1/2} + (2)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2} \;>\; \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \;=\; 3 \, , \\ 3x^2 - \log y \;&>\; 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \log\frac{3}{2} \;>\; \frac{27}{4} - \frac{1}{2} \;=\; \frac{25}{4} \;>\; 6 \, , \\ \frac{1}{2}\left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \;&<\; \frac{1}{2}\left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5/2}{1/2} \right| \;=\; \frac{1}{2}\left| \frac{1}{4} - 5 \right| \;=\; \frac{19}{8} \, , \end{aligned}$$

y para $(x,y) \in B(a,1/2)$ se tiene $v^t\,(Df)\,P\,v \;\geq\; \left(3 - \dfrac{19}{8}\right) \|v\|_2^2 \;=\; \dfrac{5}{8}\,\|v\|_2^2$, es decir que se cumple (1) con $r = 1/2$ y $\lambda = 5/8$. Ahora sabemos que f es regular e inyectiva en $B\big((2,1), 1/2\big)$ y que $f\big(B\big((2,1),1/2\big) \supseteq B\big((e+2,8), r_2\big)$ con $r_2 = \lambda r = 5/16 > 0'3$.

Conclusión. Hay una inversa local f^{-1} de clase $\mathcal{C}^\infty$, definida en $V = B\big((e+2,8), 0'3\big)$ y determinada de manera única por la condición de que toma todos sus valores dentro de $B\big((2,1), 0'5\big)$. Como la bola V es *conexa por caminos,* es también la única inversa local que lleva $(e+2, 8) \mapsto (2,1)$ y está definida en todo V.